

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

I. I. VOROVICH  
И. И. ВОРОВИЧ

CERTAIN MATHEMATICAL PROBLEMS  
НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ  
НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК  
IN THE NON-LINEAR THEORY OF SHELLS

АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Ленинград

1958

Современное машиностроение и строительная техника широко используют в качестве несущих элементов конструкций тонкостенные стержни, пластины и оболочки.

Такое широкое использование тонкостенных элементов объясняется, в основном, тем, что с их помощью удалось значительно продвинуть вперёд решение одной из важнейших проблем машиностроения и строительной техники — создание конструкций и машин наименьшего веса при заданных служебных качествах.

Широкое применение тонкостенных элементов в практике инженерного дела привело к созданию ряда прикладных теорий, предназначающихся для расчёта тонкостенных стержней, пластин и оболочек. Каждая из таких прикладных теорий использует основные допущения математической теории упругости, дополненные некоторыми новыми гипотезами. Эти гипотезы вводятся для упрощения математической стороны вопроса, и учитывают, что мы имеем дело не с произвольным деформируемым телом, а с тонкостенным элементом. Примерами таких гипотез являются гипотеза нормального элемента Кирхгофа, гипотеза недеформируемости конструкции и отсутствия сдвигов В. З. Власова и др.

Наиболее полно разработанными оказались варианты прикладных теорий, основанные на предположениях о справедливости закона Гука и малости деформаций, в силу чего основные проблемы этих теорий сводились к решению некоторых линейных задач математической физики.

Такая линейная трактовка работы тонкостенных элементов нашла большое распространение в расчётной инженерной практике, и хорошо описывает реальные процессы деформирования тонкостенных элементов в весьма широком круге задач. Очень полное изложение результатов этой теории дано в известных монографиях В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, А. И. Лурье, В. В. Новожилова.

Вместе с этим выяснилось, что многие стороны работы тонкостенных конструкций не могут быть удовлетворительно описаны в рамках линейной теории.

Так, например, хорошо известно, что для расчёта тонкой заделанной по контуру пластины линейная теория не может применяться, если прогибы оказываются порядка толщины пластины. Больше того, линейная теория здесь уже не может дать даже качественного описания явления.

К числу вопросов, которые не могут быть разрешены на основе линейной теории относится и вопрос об определении момента потери устойчивости оболочки. В целом ряде случаев расчёт критических нагрузок по линейной теории даёт результаты, не соответствующие экспериментальным, вследствие чего становится необходимым переход к нелинейным теориям.

Наконец, во многих случаях важно рассчитать напряженное состояние пластин и оболочек в послекритической стадии, что также требует применения нелинейной теории.

Своё начало нелинейная теория пластин и оболочек ведет от известных работ И. Г. Бубнова. Существенную роль в развитии нелинейной теории оболочек и её приложений имеют исследования И. А. Алумяэ, В. З. Власова, А. С. Вольмира, К. З. Галимова, Х. М. Муштари, В. В. Новожилова, Д. Ю. Панова, В. И. Феодосьева и др., выполненные в Советском Союзе, а также работы ряда иностранных авторов: Кармана, Мурнагана, Доннела, Тзяна, Чен-Вей-Цанга и др.

Анализ современного состояния данного раздела прикладной теории упругости позволяет сделать заключение о том, что здесь уже оформилась общая теория и развиты довольно эффективные методы решения прикладных задач.

Вместе с этим приходится отметить, что математические вопросы нелинейной теории оболочек до настоящего времени почти не рассматривались. Лишь некоторые результаты, относящиеся к пластинам, получены в этом направлении в работах К. Фридрихса, И. Стокера, Д. Ю. Панова и Н. Ф. Морозова.

Между тем, вряд ли можно сомневаться в том, что фундамент общей теории здесь должен составить строгий математический анализ основных задач нелинейной теории оболочек. Необходимость детального анализа основных уравнений нелинейной теории оболочек диктуется значительной сложностью физических задач нелинейной теории оболочек.

Кроме того, следует иметь в виду, что до сих пор не удается построить решение основных уравнений нелинейной теории оболочек в замкнутой форме и тем самым убедиться в их разрешимости, даже в самых простых случаях. Нако-

неч, отметим, что в подробном исследовании с точки зрения характера, быстроты сходимости нуждаются и применяемые в настоящее время в нелинейной теории оболочек приближенные методы.

Определённую трудность в рассмотрении математических вопросов нелинейной теории оболочек представляет то обстоятельство, что все они сводятся к нелинейным задачам математической физики.

Некоторые результаты здесь оказалось возможным получить на пути систематического применения методов линейного и нелинейного функционального анализа.

Круг вопросов, связанных с исследованием основных задач данной теории, можно, на наш взгляд, охарактеризовать следующим образом:

- 1) разрешимость основных задач нелинейной теории оболочек и общие свойства решений;
- 2) приближенные методы в нелинейной теории оболочек;
- 3) устойчивость оболочек в большом.

Рассмотрению перечисленных вопросов и посвящена диссертация.

## Глава I ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

### Постановка краевых задач

В первой главе приведены основные соотношения двух вариантов нелинейной теории оболочек.

Первый из этих вариантов содержит три уравнения относительно трёх составляющих  $u$ ,  $v$ ,  $w$  вектора перемещений  $\bar{w}(u, v, w)$  точек срединной поверхности оболочки:

$$R_1(u, v, w) = 0; \quad R_4(u, v, w) = 0; \quad (1)$$

$$R_3(u, v, w) = 0 \quad (2)$$

Уравнения (1, 2) составлены в предположении, что оболочка тонкая, справедлив закон Гука. Кроме того, при выводе системы (1, 2) предполагалось, что квадраты углов поворота нормали имеют порядок удлинений и сдвигов срединной поверхности, а основные уравнения задачи могут быть упрощены по методу Муштари. Система уравнений (1, 2) рассмотрена при граничных условиях

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0; \quad (3)$$

$$w|_{\Gamma} = 0; \quad (4)$$

$$M_n = -k(s) \frac{\partial w}{\partial n} + \tilde{M}_n(s) \quad (5)$$

В (5)  $\tilde{M}_n(s)$  внешний момент, приложенный к оболочке,  $k(s)$  характеристика упругой заделки оболочки.  $\tilde{M}_n(s)$  и  $k(s)$  можно считать кусочно непрерывными функциями, причём на отдельных участках границы допускаются равенства  $k(s)=0$  (шарнирное опирание) и  $k(s)=\infty$  (заделанная оболочка).

Второй вариант уравнений нелинейной теории оболочек содержит два уравнения относительно  $w$  и функции напряжений  $\Phi$ :

$$R_4(w, \Phi) = 0; \quad (6)$$

$$R_5(w, \Phi) = 0. \quad (7)$$

Однако из этих уравнений (6) является уравнением равновесия элемента оболочки в проекции на нормаль к срединной поверхности, а другое (7) уравнением совместности. К уравнениям (6, 7) мы добавляем граничные условия (4, 5) и два других условия для  $\Phi$ , соответствующих заданным на контуре тангенциальным усилиям. Задача отыскания решений системы (1, 2) при соответствующих граничных условиях ниже будет называться задачей I, а задачу отыскания решений системы (6, 7) при соответствующих граничных условиях будем называть задачей III.

Для исследования задач I, III в первой главе вводятся некоторые функциональные пространства, из которых основным будет пространство  $H_{12}$ . Для его образования предположим, что срединная поверхность оболочки задана в параметрической форме  $\bar{r} = \bar{r}(\alpha, \beta)$ , где параметры  $\alpha, \beta$  изменяются в некоторой ограниченной области  $\Omega$  и образуют ортогональную сеть. Рассмотрим множество  $C_1$  функций  $w$ , имеющих в  $\bar{\Omega}$  непрерывные четвертые производные и удовлетворяющих геометрически граничным условиям. На этом множестве зададим скалярное произведение:

$$(w_1, w_2)_{H_{12}} = \int_{\Omega} [x_1^{(1)} \cdot (x_1^{(2)} + \sigma x_2^{(2)}) + x_2^{(1)} (x_2^{(2)} + \sigma x_1^{(2)}) + 2(1-\sigma) \tau^{(1)} \tau^{(2)}] A B d\alpha d\beta \quad (8)$$

где  $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \tau^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  компоненты изгибной деформации срединной поверхности оболочки,  $\sigma$  коэффициент Пуассона,  $A^1, B^2$  коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности. В норме, порождаемой (8), произведем замыкание  $C$ , в результате чего и получаем пространство  $H_{12}$ . Во втором параграфе первой главы подробно изучаются свойства элементов введенных пространств и, в частности, пространства  $H_{12}$ . При этом оказывается, что  $H_{12}$  содержит непрерывные в  $\bar{\Omega}$  функции, имеющие обобщенные производные второго порядка, суммируемые в  $\Omega$  с квадратом. С помощью построенных функциональных пространств для задач I, III вводятся на основе некоторых интегральных тождеств обобщенные решения, которые однако имеют непосредственный механический смысл.

Именно, для задачи I всякое обобщенное решение удовлетворяет уравнениям равновесия, записанным с помощью принципа возможных перемещений, а для задачи III всякое обобщенное решение удовлетворяет так называемому смешанному вариационному принципу (Н. А. Алумяэ, К. З. Галимов).

С помощью функционального метода отыскания обобщенных решений для задач I, III сводится к решению операторных уравнений

$$w = G_i w; \quad i = 1, 3, \quad (9)$$

где  $G_i$  операторы, действующие в  $H_{12}$ . Операторные уравнения (9) и являются предметом последующих рассмотрений.

## Глава II

### РАЗРЕШИМОСТЬ ОСНОВНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ОБИЛИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

Доказательство разрешимости операторных уравнений (9) основано на том, что операторы  $G_i$  оказываются в  $H_{12}$  вполне непрерывными или точнее усиленно-непрерывными (последовательность  $G_i w_n$  сходится сильно в  $H_{12}$ , если последовательность  $w_n$  сходилась слабо). В силу этого разрешимость уравнений (9) оказывается возможным установить с помощью метода Шаудера-Лерая.

Другой важный факт, на котором основано доказательство разрешимости уравнений (9), заключается в том, что

на сферах достаточно большого радиуса в  $H_{12}$  векторное поле

$$w - t \cdot G_t w \quad (10)$$

не имеет нулей ни при каком  $t \in [0, 1]$ . После этого существование решений уравнений (9), вытекает, например, из той формы теоремы Шаудера-Лерея, которая ей придана в работах М. А. Красносельского.

Отметим, что таким путем существование решений удалось установить в таких практически важных случаях, когда контур оболочки имеет углы, а силы  $X, Y, Z$ , приложенные к оболочке, суммируемы, с какой-либо степенью  $p > 1$  (для  $Z$  можно даже считать  $p = 1$ , т. е. допустить разрывные силы типа сосредоточенных сил).

Отметим также, что использованный метод доказательства даёт возможность исследовать и ряд других граничных задач, когда, например, заданы смешанные относительно тангенциального напряженного состояния граничные условия, а также случай анизотропных и неоднородных оболочек.

В общем случае решение задач I, III будет единственным, что находится в полном соответствии с механическим содержанием задачи. Поэтому в данной главе приведены некоторые условия единственности задач I, III. Именно, установлено, что единственность решений задач I, III в малой окрестности нуля пространства  $H_{12}$  может быть всегда обеспечена за счёт малости в определенном смысле внешних нагрузок. Во всём пространстве  $H_{12}$  задачи I, III будут иметь единственное решение, если малы не только нагрузки, но и кривизны оболочки. Отметим, что, по крайней мере, с качественной стороны эти выводы, как показывает анализ теоретических, экспериментальных и расчётных данных, не могут быть улучшены. В тесной связи с единственностью решения задач I, III находится и вопрос о жёсткости оболочек. В работе оболочка считается жёсткой, если при отсутствии внешних сил она при данных условиях закрепления имеет единственную ненапряженную форму равновесия. Установление критериев жесткости имеет существенное значение, так как оболочки, не являющиеся жёсткими, нуждаются, например, в специальной методике расчёта на устойчивость. В работе приведены некоторые условия жесткости оболочек.

Последняя часть второй главы заключает исследование дифференциальных свойств полученных обобщенных реше-

ний. Изучение дифференциальных свойств обобщенных решений интересно не только само по себе, но служит также базой, на которой в главе III получены оценки погрешности, возникающей при использовании в наших задачах прямых методов.

Удалось установить, какими свойствами гладкости должны обладать внешние силы, действующие на оболочку, срединная поверхность оболочки, граница, чтобы каждое обобщенное решение стало классическим или, вообще, обладало произвольной степенью гладкости в  $\bar{\Omega}$ . Подробное исследование этого вопроса проведено, если на контуре имеют место условия  $w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , однако примененный метод даёт возможность оценить гладкость решений в замкнутой области и при других граничных условиях.

### Глава III ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Данная глава посвящена анализу приближенных методов, применяемых в настоящее время в нелинейной теории оболочек.

Для широкого класса случаев рассмотрен метод решения основных задач посредством разложения решений в ряд по степеням малого параметра. К решению частных задач этот метод применялся в работах Д. Ю. Панова, П. Я. Полубариновой-Кочиной, Чен-Вей-Цанга, автора и др.

В диссертации даётся общая схема этого метода, причём рассмотрены два варианта его использования. В первом из этих вариантов разложение решений ищется в окрестности неособого решения. Под «неособыми» решениями в работе, грубо говоря, понимаются решения, не соответствующие моменту хлопка оболочки. Более точное определение «неособого» решения в силу его громоздкости здесь даваться не будет. В случае, если искомое решение лежит в окрестности «особого» решения, то соответствующее разложение строится методом Шмидта.

В обоих случаях установлены достаточные условия сходимости указанных разложений.

Далее, здесь же обосновано применение метода последовательных приближений, для решения основных задач

нелинейной теории оболочек и дана оценка быстроты сходимости. Метод последовательных приближений для исследования цилиндрической оболочки был применен С. А. Алексеевым.

Основное внимание в данной главе уделено анализу прямых методов в нелинейной теории оболочек.

Метод Бубнова—Галеркина для решения задач нелинейной теории оболочек часто используется в следующей форме, рекомендованной П. Ф. Папковичем: приближённое решение ищется в виде:

$$w_n = \sum_{k=1}^n D_{nk} X_k(P),$$

где  $X_k(P)$  образуют базис в  $H_{12}$ . После этого  $n$ ,  $v$  из условия (1) (или  $\Phi$  из уравнения (7)) выражаются через  $D_{nk}$ .  $D_{nk}$  определяются удовлетворением уравнения (2) (или (6)) по Бубнову—Галеркину. Х. М. Муштари предложил использовать метод Бубнова—Галеркина, приближённо удовлетворяя все три уравнения (1, 2).

В. З. Власов впервые высказал идею возможности использовать метод Бубнова—Галеркина при приближенном удовлетворении уравнений (6, 7).

В работе обоснованы все вышеупомянутые формы применения прямых методов. Поскольку во всех этих случаях получились сходные результаты, то мы ограничимся их формулировкой для случая П. Ф. Папковича.

1) Система уравнений метода Бубнова—Галеркина оказывается эквивалентной уравнениям метода Ритца:

$$\frac{\partial I_1}{\partial D_{nk}} = 0, \quad (12)$$

где  $I_1$  — потенциальная энергия системы оболочки — внешние силы, выраженная через  $D_{nk}$ .

Иными словами в данном случае метод Бубнова—Галеркина совпадает с методом Ритца.

2) Система (12) имеет при каждом  $n$  по меньшей мере одно действительное решение.

3) Все  $w_n$ , получаемые данным методом, лежат в некотором шаре пространства  $H_{12}$  и образуют сильно компактное множество.

4) Всякая последовательность приближений, слабо сходящаяся в  $H_{12}$ , сходится сильно, и всякий сильный предел

последовательностей из множества приближений  $\{w_n\}$  есть решение соответствующей задачи.

5) Множество приближений  $\{w_n\}$  содержит последовательность, минимизирующую функционал  $I_1$ .

6) Всякое решение операторных уравнений, дающее функционалу  $I_1$  строгий минимум\* (или максимум) принадлежит множеству предельных точек  $\{w_n\}$ , т. е. может быть приближено найдено методом Бубнова—Галеркина.

Отметим также, что в ходе обоснования прямых методов в данной главе решена проблема минимума функционала полной энергии в рассматриваемых задачах нелинейной теории оболочек, т. е. доказано, что этот функционал имеет по крайней мере в одной точке  $H_{12}$  минимум, а всякая минимизирующая последовательность компактна в  $H_{12}$ .

В случае, если на всей границе оболочки удовлетворены условия  $w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = 0$ , то для некоторых типов базисов возможно оценить быстроту убывания погрешности приближенного решения в зависимости от числа удержанных членов. При этом оказалось, что быстрота убывания погрешности в  $H_{12}$  в значительной степени определяется гладкостью решения в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ . Таким путем оказалось возможным, например, оценить быстроту убывания погрешности, для базисов, использованных в работах Д. Ю. Панова и В. И. Феодосьева, посвященных хлопку сферической оболочки.

Во всех предыдущих рассмотрениях речь шла о приближениях решений в пространстве  $H_{12}$ . Это давало возможность получать последовательности, приближающие наиболее существенные напряжения в оболочке лишь в среднем. Весьма важно поэтому построение таких последовательностей, которые бы давали равномерные приближения в замкнутой области для наиболее существенных напряжений в оболочке. В работе указываются два способа получения таких последовательностей. Первый способ заключается в переходе к интегрированным последовательностям  $\tilde{w}_n = G_l w_n$ . Второй способ основывается на некотором усилении требований к базисным функциям.

\*  $w_0$  придаёт  $I_1$  строгий минимум (максимум), если можно указать в  $H_{12}$  такой шар с центром в  $w_0$ , в котором имело бы место неравенство

$$I_1(u) > I_1(w_0) \quad (I_1(u) < I_1(w_0))$$

## Глава IV

### НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой главе изучаются вопросы устойчивости оболочек в большом в условиях задач I, III.

Поскольку результаты исследования в указанных случаях оказались сходными, то мы ограничимся их формулировкой применительно к задаче 1. Пусть внешние силы, приложенные к оболочке, имеют вид  $-\lambda X; -\lambda Y; -\lambda Z$ , причем при  $\lambda = +1$  оболочка обладает безмоментным напряженным состоянием с усилиями  $T_1, T_2, S$ . Очевидно, при любом оболочке также будет обладать безмоментным напряженным состоянием, но оно далеко не при всех  $\lambda$  будет единственным. Поэтому при решении задачи устойчивости необходимо:

- 1) дать описание числа  $n(\lambda)$  возможных напряженных состояний оболочки при различных  $\lambda$
- 2) определить степень реальности каждой из форм равновесия оболочки, если их несколько.

Для практики, в частности, весьма важно выяснить пределы изменения  $\lambda$ , при которых  $n(\lambda) = 1$ . Исследование вопроса о числе форм равновесия оболочки при разных  $\lambda$  сведено в работе к рассмотрению спектра некоторой нелинейной краевой задачи. При этом оказалось возможным установить следующее обстоятельство. Пусть  $T_1, T_2, S$  таковы, что выполнено условие

$$J' = \int_2 \left( T_1 \frac{w_x^2}{A^2} + T_2 \frac{w_y^2}{B^2} + 2S \frac{w_x w_y}{AB} \right) AB d\alpha d\beta \geq 0,$$

если  $w \in H_1 \Omega$  и из  $J' = 0$  вытекает  $w = 0$ .

В этом случае существует такое  $\lambda_u$  ( $\lambda$  нижнее), что при  $\lambda < \lambda_u$  налицо единственная безмоментная форма равновесия оболочки ( $n(\lambda) = 1$ ) и в то же время в любом полуинтервале вида  $\lambda_u \leq \lambda \leq \lambda_u + \varepsilon$ , где сколь угодно малое положительное число, имеются такие  $\lambda$ , которым, кроме безмоментной, соответствует по крайней мере одна моментная форма ( $n(\lambda) \geq 2$ ).

Таким образом, определение пределов изменения  $\lambda$ , при которых  $n(\lambda) = 1$ , сводится к нахождению  $\lambda_u$ . Можно было предполагать, что  $\lambda_u$  совпадает с первой точкой ветвления  $\lambda$ , решений уравнений, описывающих поведение оболочки после потери устойчивости, а  $\lambda_u$  совпадает с первым собственным

числом соответствующей линеаризованной задачи  $\lambda_e$  (Эйлера). На пути отождествления  $\lambda_u$ ,  $\lambda_b$ ,  $\lambda_e$  очень часто и решаются задачи устойчивости упругих систем. Вопрос о соотношении  $\lambda_u$  и  $\lambda_e$  для стержней решался Ф. С. Ясинским и окончательно решен М. А. Красносельским и И. Г. Бахтиным. Исследование этого вопроса для оболочек, проведенное в диссертации, привело к следующим результатам:

- 2) Все собственные числа линеаризированной краевой задачи (и только они) являются точками ветвления решений нелинейной краевой задачи, описывающей потерю устойчивости оболочки в большом.
- 3) При каждом значении  $\lambda$   $\lambda_e$  наряду с безмоментной формой равновесия оболочки налицо по меньшей мере одна моментная.

В силу этих обстоятельств имеют место соотношения

$$\lambda_u \leq \lambda_e = \lambda_b. \quad (13)$$

Из (13) следует, что вопрос о возможности использования метода линеаризации Эйлера при решении задач устойчивости оболочек сводится к выяснению условий осуществления равенства

$$\lambda_u = \lambda_b \quad (14)$$

В работе даются условия, достаточные для осуществления (14) и условия, достаточные для осуществления

$$\lambda_u < \lambda_b \quad (15)$$

В последнем случае, очевидно, задача устойчивости не может решаться на основе линеаризированных уравнений.

Показано, что соотношение (14) всегда имеет место для пластин и этим самым обоснован метод линеаризации в задачах устойчивости пластин.

Рассмотрены примеры на устойчивость цилиндрических и сферических оболочек, когда выполняется (15), и, следовательно, задача устойчивости, методом линеаризации решена быть не может.

В некоторых из рассмотренных случаев невозможность определения критических нагрузок на основе линейной теории устанавливалась ранее путем приближенного решения задачи каким-либо прямым методом.

В работе приводится оценка сверху для  $\lambda_u$  и дается обоснование применению прямых методов в задачах исследования после критических состояний.

Установлены также некоторые качественные характеристики поведения пластин после потери устойчивости. Так,

например, доказано, что каждому уровню потенциальной энергии пластины после утери устойчивости соответствует не менее счетного числа значений параметра  $\lambda_d$ , при которых этот уровень достигается, при этом  $\lambda_d \rightarrow \infty$ . Этот факт обобщает известные результаты относительно поведения стержней после потери устойчивости.

В заключение в данной главе развивается методика решения вопроса о степени реальности той или иной формы равновесия оболочки на основе вероятностных соображений.

Необходимость привлечения вероятностных соображений к выбору наиболее реальной формы равновесия оболочки определяется следующими обстоятельствами. В случае, если  $\lambda_u < \lambda_s$ , то как показывает эксперимент, хлопок оболочки происходит при  $\lambda$ , больших  $\lambda_u$ . Это превышение определяется характером и интенсивностью случайных толчков, которые испытывает оболочка в ходе эксплуатации и случайными отклонениями в данных оболочки, а также отклонениями в способе заделки оболочки. Мысль о привлечении вероятностных соображений для решения вопроса о выборе наиболее реальной формы равновесия оболочки высказывалась В. И. Феодосьевым и А. С. Вольмировом. В работе принята некоторая схема описания случайного процесса деформирования оболочки. При этом приближенное определение вероятностных характеристик сводится к решению некоторых дифференциальных уравнений и к последующим квадратурам. В частных случаях удается получить численные результаты и исследовать влияние разных случайных факторов на характеристики рассеивания формы равновесия оболочки.

В данной части работы не дается строгого обоснования применяемой методики.

В ходе выполнения работы автором произведены следующие публикации, исчерпывающие основное содержание работы:

- 1) О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Известия Акад. Наук СССР. Серия матем. 19 (1955 г.).
- 2) О поведении круглой плиты после потери устойчивости. Ученые записки Ростовского университета, т. 32, вып. 4, 1955 г.
- 3) О некоторых прямых методах в нелинейной теории плоских оболочек. ДАН. 105, № 1, 1955 г.
- 4) Некоторые задачи нелинейной теории оболочек. Труды третьего математического съезда. 1956 г.
- 5) О некоторых прямых методах в нелинейной теории оболочек. Прикладная математика и механика, т. XX, вып. 4, 1956 г.
- 6) О существовании решений в нелинейной теории оболочек. ДАН. 117, № 2. 1957 г.

Кроме того, изложению основных результатов работы посвящались  
следующие сообщения автора.

- 1) О некоторых прямых методах в иельной теории оболочек.  
Доклад на Всесоюзном совещании по теории упругости, теории пластичности и теоретическим вопросам строительной механики. Москва, 1957.
- 2) Оценка точности приближенных решений уравнений иельной теории оболочек прямыми методами. Доклад на Всесоюзном совещании по теории и конструкциям тонких оболочек. Тарту, 1957 г.
- 3) О статистическом методе в задачах устойчивости оболочек. Доклад на Всесоюзном совещании по теории и конструкциям тонких оболочек. Тарту, 1957 г.